]V-59 (56 min) 13-julio-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Ecuaciones de campo de Einstein (cte cosmológica)** **Límite Newtoniano**

La acción de EHGHY [(III) del v-57] lleva a la ecuación de campo de Einstein en ausencia de masas. Ahora añadimos un término, funcional de un Lagrangiano $\mathcal{L}_m$ dependiente de la masa. Además, multiplicamos la otra parte de la acción por una constante λ, cuyo valor hará que, en límite de baja gravedad, surja Newton de las ecuaciones de Einstein:

$$\boldsymbol{S_{EHGHY}[g] = \lambda\left[\int_M d^4x\sqrt{-g}\cdot R \;+\; 2\int_{\partial M} d^3p\;\sqrt{|h|}\cdot K\right] + \int_M d^4x\sqrt{-g}\cdot\mathcal{L}_m}$$

Ahora la variación de la acción será igual a lo visto en v-57 (multiplicado por λ) más la variación del nuevo término: $\delta S[g] = \int_M d^4x\sqrt{-g}\;\delta g^{\alpha\beta}\left[R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g_{\alpha\beta}\right]\lambda + \int_M d^4x\,\delta\left(\sqrt{-g}\cdot\mathcal{L}_m\right)$

Aplicamos regla de Leibniz a $\boldsymbol{\delta\left(\sqrt{-g}\cdot\mathcal{L}_m\right)}$ y utilizamos (III) de v-52: $\delta\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\alpha\beta}\,\delta g^{\alpha\beta}$ y, tras sacar factores comunes, queda:

$$\delta S[g] = \int_M d^4x\sqrt{-g}\;\delta g^{\alpha\beta}\left[\left(R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g_{\alpha\beta}\right)\lambda - \frac{1}{2}\mathcal{L}_m g_{\alpha\beta} + \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\alpha\beta}}\right]$$

Para hacer nula la variación de la Acción tiene que serlo el interior del corchete, luego ha de cumplirse:

$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\lambda}\left(\mathcal{L}_m g_{\alpha\beta} - 2\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\alpha\beta}}\right)$ Llamamos **Tensor energía.momento:** $\boldsymbol{-\left(g_{\alpha\beta}\mathcal{L}_m - 2\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\alpha\beta}}\right) = T_{\alpha\beta}}$ **(I)**

__Ecuaciones de campo de Einstein__ (en cada punto hay un valor de $T_{\alpha\beta}$): $\boldsymbol{R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = -\frac{1}{2\lambda}T_{\alpha\beta}}$ **(II)**

Recordemos el v-50: en Esp-Tmp de 1+1 dimensiones, el tensor Energía-Momento es matriz con 4 componentes:

$$\mathbb{T} = \boldsymbol{\varepsilon_0\,\gamma^2[e_0\otimes e_0] + \varepsilon_0\,\gamma^2\beta[e_0\otimes e_1] + \varepsilon_0\,\gamma^2\beta[e_1\otimes e_0] + \varepsilon_0\,\gamma^2\beta^2[e_1\otimes e_1]}$$

Desde un SR en el que la masa esté en reposo (Rest-Frame), puesto que $\beta = v/c = 0$, el tensor Energía-Momento sólo tiene una componente: $\mathbb{T} = \varepsilon_0\left[e'_0\otimes e'_0\right]$ siendo $\boldsymbol{T^{00} = \varepsilon_0 = \rho c^2}$ (la densidad de masa-energía en reposo)

Generalmente, las ecuaciones de Einstein se utilizan para, conocido el tensor energía-momento de una zona del espacio-tiempo, deducir su métrica. No obstante, lo que haremos ahora es deducir el valor de la constante λ para que en el límite de baja gravedad salga la ecuación de Newton: $\boldsymbol{\nabla^2 V = 4\pi G\rho \;\Longrightarrow\; g = G\frac{M}{r^2}}$

__El límite de baja gravedad se fuerza usando una métrica de Esp-Tmp casi plano__. En v-30 con Esp-Tmp de Rindler (plano pero con SR acelerado) se deduce una métrica para zona alejada. También podemos partir de la métrica de Esp-Tmp curvo de Swarzschild (alrededor de una masa), que en coordenadas esféricas es:

$ds^2 = -\left(1 + 2\frac{V}{c^2}\right)c^2dt^2 + \frac{1}{1+2\frac{V}{c^2}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\,d\phi^2)$ siendo $V = -\frac{GM}{r}$ el potencial gravitatorio

Hacemos aproximaciones en zona alejada, donde el potencial gravitatorio pequeño: **__$V/c^2 \ll 1$__:**
El $\boldsymbol{g_{00}}$ lo dejamos igual, pues la pequeñez de V/c^2 se compensa al multiplicar por c^2, pero el $\boldsymbol{g_{11}}$ lo aproximamos a 1

$$ds^2 \approx -\left(1 + 2\frac{V}{c^2}\right)c^2dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\,d\phi^2)$$

Pasando la parte espacial a cartesianas queda la métrica utilizada como aproximación para gravedad débil.

$$\boldsymbol{ds^2 \approx -\left(1 + 2\frac{V}{c^2}\right)c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \;\Longrightarrow\; g_{00} = -\left(1 + 2\frac{V}{c^2}\right);\; g_{11} = 1;\; g_{22} = 1;\; g_{33} = 1} \quad \textbf{(III)}$$

__Cálculo de Christoffel con métrica de gravedad débil__ haciendo las derivadas de productos de vectores-base, indicadas en la tabla, se obtiene el Christoffel que se indica debajo. A la derecha se exponen de forma general:

$\partial_0(e_0\cdot e_0)$	$\partial_1(e_0\cdot e_0)$	$\partial_2(e_0\cdot e_0)$	$\partial_3(e_0\cdot e_0)$	$\Gamma^0_{n0} = \frac{1}{1+2\frac{V}{c^2}}\,\partial_n\frac{V}{c^2}$ Aprox. Taylor: $\boldsymbol{\Gamma^0_{n0} \approx \left(1 - 2\frac{V}{c^2}\right)\partial_n\frac{V}{c^2}}$
$\boldsymbol{\Gamma^0_{00}}$	$\boldsymbol{\Gamma^0_{10}}$	$\boldsymbol{\Gamma^0_{20}}$	$\boldsymbol{\Gamma^0_{30}}$	
$\partial_0(e_0\cdot e_0)$	$\partial_0(e_0\cdot e_1)$	$\partial_0(e_0\cdot e_2)$	$\partial_0(e_0\cdot e_3)$	$\boldsymbol{\Gamma^n_{00} = \partial_n\frac{V}{c^2}}$
$\boldsymbol{\Gamma^0_{00}}$	$\boldsymbol{\Gamma^1_{00}}$	$\boldsymbol{\Gamma^2_{00}}$	$\boldsymbol{\Gamma^3_{00}}$	

Al no tener V dependencia temporal, cuando $n = 0$ el símbolo de Christoffel que resulta es nulo: $\boldsymbol{\Gamma^0_{00} = 0}$
Todos los demás Christoffel puede comprobarse que son nulos

Cálculo del tensor de Ricci. En v-54 vimos que su componente αβ: $R_{\alpha\beta}=\partial_p\Gamma^p_{\alpha\beta}-\partial_\beta\Gamma^p_{\alpha p}+\Gamma^k_{\alpha\beta}\Gamma^p_{kp}-\Gamma^k_{\alpha p}\Gamma^p_{k\alpha}$
Podemos eliminar los términos con productos de Christoffel, pues contendrán productos de V ó derivadas de V, que en nuestra aproximación de gravedad débil tienden a cero. Queda: $R_{\alpha\beta}=\partial_p\Gamma^p_{\alpha\beta}-\partial_\beta\Gamma^p_{\alpha p}$

$$R_{00}=(\partial_0\Gamma^0_{00}+\partial_1\Gamma^1_{00}+\partial_2\Gamma^2_{00}+\partial_3\Gamma^3_{00})-\partial_0(\Gamma^0_{00}+\Gamma^1_{01}+\Gamma^2_{02}+\Gamma^3_{03})$$

No hay dependencia temporal y consideramos los Christoffel distintos de cero: $R_{00}=\partial_1\Gamma^1_{00}+\partial_2\Gamma^2_{00}+\partial_3\Gamma^3_{00}$

$$R_{00}=\partial_1\partial_1\frac{V}{c^2}+\partial_2\partial_2\frac{V}{c^2}+\partial_3\partial_3\frac{V}{c^2}=\frac{1}{c^2}(\partial_1^2V+\partial_2^2V+\partial_3^2V)\quad\to\quad \boxed{R_{00}=\frac{1}{c^2}\nabla^2V}$$

$$R_{11}=(\partial_0\Gamma^0_{11}+\partial_1\Gamma^1_{11}+\partial_2\Gamma^2_{11}+\partial_3\Gamma^3_{11})-\partial_1(\Gamma^0_{10}+\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{13})=-\partial_1\Gamma^0_{10}$$

$$R_{11}=-\partial_1\left[(1-2\frac{V}{c^2})\partial_1\frac{V}{c^2}\right]=-\left[\left(-\frac{2}{c^2}\partial_1V\right)\left(\frac{1}{c^2}\partial_1V\right)+(1-2\frac{V}{c^2})(\partial_1\partial_1\frac{V}{c^2})\right]=\frac{2}{c^4}(\partial_1V)^2-(1-2\frac{V}{c^2})\frac{1}{c^2}\partial_1^2V$$

En la aproximación de gravedad débil: $(\partial_1V)^2\to 0$ y $(1-2\frac{V}{c^2})\to 1$ Por lo tanto queda: $\boxed{R_{11}\approx-\frac{1}{c^2}\partial_1^2V}$

Operando igual fácilmente se obtiene: $\boxed{R_{22}\approx-\frac{1}{c^2}\partial_2^2V}$ $\boxed{R_{33}\approx-\frac{1}{c^2}\partial_3^2V}$

Estas son las únicas componentes del Tensor de Ricci que necesitamos para hallar la curvatura escalar R. No obstante, como ejercicio, hallamos otras componentes con índices cruzados. Por ejemplo R_{12}:

$$R_{12}=(\partial_0\Gamma^0_{12}+\partial_1\Gamma^1_{12}+\partial_2\Gamma^2_{12}+\partial_3\Gamma^3_{12})-\partial_2(\Gamma^0_{10}+\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{13})=-\partial_2\Gamma^0_{10}$$

$$R_{12}=-\partial_2\left[(1-2\frac{V}{c^2})\partial_1\frac{V}{c^2}\right]=-\left[\left(-\frac{2}{c^2}\partial_2V\right)\left(\frac{1}{c^2}\partial_1V\right)+(1-2\frac{V}{c^2})(\partial_2\partial_1\frac{V}{c^2})\right]=\frac{2}{c^4}(\partial_2V)(\partial_1V)-(1-2\frac{V}{c^2})\frac{1}{c^2}\partial_2\partial_1V$$

Igual que antes, en nuestra aproximación: $(\partial_2V)(\partial_1V)\to 0$ y $(1-2\frac{V}{c^2})\to 1$ Por lo tanto: $\boxed{R_{12}\approx-\frac{1}{c^2}\partial_2\partial_1V}$

Igualmente se llega a $R_{21}\approx-\frac{1}{c^2}\partial_1\partial_2V$; $R_{23}\approx-\frac{1}{c^2}\partial_3\partial_2V$, etc. En general $\boxed{R_{ab}\approx-\frac{1}{c^2}\partial_b\partial_aV}$
Cuando a ó b es cero, al no tener V dependencia temporal, la correspondiente componente es nula.
Esa forma general de componentes Ricci R_{ab}, incluye a todas salvo R_{00} , calculada anteriormente.

Cálculo de la curvatura escalar. En v-54 vimos que era: $R=g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$. No obstante, en el video se emplea un truco para obtenerla en campo lleno de masa en reposo, en que $T^{00}=\varepsilon_0=\rho c^2$ ¿$T^{00}=T_{00}$?
En ecs.Einstein **(II)** se hallan las trazas de los tensores de ambos miembros (recordemos que: $Trz\,A_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}$)

$$g^{\alpha\beta}\left(R_{\alpha\beta}-\tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right)=-g^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2\lambda}T_{\alpha\beta}\right)\ \Longrightarrow\ g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}-\tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}R=-\frac{1}{2\lambda}g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$$

$g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}=R$ (definición R); $g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}=4$ ($g^{\alpha\beta}=1/g_{\alpha\beta}$) $\to$ Traza 1º miembro: $R-2R=-R$ (válido $\forall\,\alpha\beta$)

2º miembro: caso campo lleno masa en reposo, sólo existe $T_{00}=\rho c^2\to$ Traza 2º miembro: $-\frac{1}{2\lambda}g^{00}\rho c^2$

Al igualar obtenemos la curvatura escalar para el caso de campo lleno de masa en reposo: $\boxed{R=\frac{1}{2\lambda}g^{00}\rho c^2}$ **(IV)**

Aplicación de ecs Einstein en gravedad débil y curvatura escalar en caso de campo lleno de masa en reposo
Introducimos en ecs de Einstein **(II)** la curvatura escalar obtenida:

$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2\lambda}g^{00}\rho c^2\right)=-\frac{1}{2\lambda}T_{\alpha\beta}$ ecuaciones válidas para cualquier pareja de índices α y β

La aplicamos para índices α=0 y β=0 $\to R_{00}-\frac{1}{2}g_{00}\left(\frac{1}{2\lambda}g^{00}\rho c^2\right)=-\frac{1}{2\lambda}T_{00}$ e introducimos la componente del tensor Ricci para gravedad débil $R_{00}=\frac{1}{c^2}\nabla^2\mathrm{V}$, la del tensor energía-momento $T_{00}=\rho c^2$ y sabemos $g_{00}g^{00}=1$

$\frac{1}{c^2}\nabla^2\mathrm{V}-\frac{1}{4\lambda}\rho c^2=-\frac{1}{2\lambda}\rho c^2\ \Longrightarrow\ \nabla^2\mathrm{V}=-\frac{c^4}{4\lambda}\rho$ Comparamos con la versión newtoniana: $\nabla^2V=4\pi G\rho$
Concluimos que, para que en caso de gravedad débil, surja la ecuación clásica de Newton la constante λ debe ser:

$\lambda=-\frac{c^4}{16\pi G}$ luego las ecs de Einstein deben reescribirse: $\boxed{R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}}$ **(V)**

Constante cosmológica. Es conocido que Einstein introdujo la constante Λ para que saliera un Universo estático. Se introduce en la Acción, donde también ponemos ya el valor de λ:

$$\boxed{S_{EHGHY}[g]=-\frac{c^4}{16\pi G}\left[\int_M d^4x\sqrt{-g}\cdot(R-2\Lambda)+2\int_{\partial M}d^3p\,\sqrt{|h|}\cdot K\right]+\int_M d^4x\sqrt{-g}\cdot\mathcal{L}_m}\quad \textbf{(VI)}$$

y hallando su variación se deduce las nuevas ecuaciones de Einstein: $\boxed{R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R+g_{\alpha\beta}\Lambda=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}}$ **(VII)**